معلومات هامة في الأعداد المركبة

1. الشكل الجبري لعدد مركب هو $z = x + iy$ والشكل المثلثي هو $z = r(cos\theta + isin\theta)$ والشكل الأسي هو $z = re^{i\theta}$

θ تسمى العمدة r الطويلة يرمز لـ θ بـ $arg(z)$ و r بـ $|z|$

2. للانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي لدينا $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و θ هي الزاوية التي تحقق $\begin{cases} cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$

إذا كان $x = y = 0$ فإن z هو العدد المركب الذي طويلته 0 ولا عمدة له

3. لدينا $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ [$\bar{z}$ مرافق هو z ولدينا $\bar{z} = x - iy$] ، $arg(-z) = \pi + arg(z)$ ، $arg(\bar{z}) = -arg(z)$

$|z^n| = |z|^n$ و $arg(z^n) = narg\ (z)$ ، $arg(z \times \acute{z}) = argz + arg\acute{z}$ ، $arg\frac{z}{\acute{z}} = argz - arg\acute{z}$

4. ليست كل عبارة من الشكل $r(cos\theta + isin\theta)$ كتابة مثلثية للعدد المركب z حتى نتحقق ان $r > 0$

إذا كان $r < 0$ فإنها كتابة للعدد المركب الذي طويلته $-r$ وعمدة له $\pi + \theta$ ، إذا كان $r = 0$ فإنها كتابة للعدد المركب الذي طويلته 0 ولا عمدة له

مثلا $\theta \in [0;\pi]$ و $z = cos\theta(cos\theta + isin\theta)$ فلدينا $\begin{cases} arg(z) = \theta \\ |z| = cos\theta \end{cases}$ من اجل $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ، و $\begin{cases} arg(z) = \pi + \theta \\ |z| = -cos\theta \end{cases}$ من اجل $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ و $\begin{cases} arg(z) \text{غيرموجودة} \\ |z| = 0 \end{cases}$ من اجل $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، نفسك الكلام بالنسبة لـ $re^{i\theta}$

ملاحظة : قد تعطى العبارة من الشكل $z = r(sin\theta + icos\theta)$ مع $r > 0$ تحول بالشكل التالي $z = r\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$

5. لكي يكون z عدد حقيقي لا بد ان يكون جزءه التخيلي معدوم أي $z - \bar{z} = 0$ و لكي يكون z عدد تخيلي صرف لابد أن يكون جزءه الحقيقي معدوم أي $z + \bar{z} = 0$ وجزءه التخيلي غير معدوم لان انعدامهما معا يعني ان $z = 0$ وهو عدد حقيقي في هذه الحالة

6. A لاحقتها z_A و B لاحقتها z_B و C لاحقتها z_C لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$، نضع $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ فلدينا $\begin{cases} arg(Z) = (\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}) \\ |Z| = \frac{BA}{BC} \end{cases}$ لذا نستنتج أن :

أ. $arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ يعني أن المثلث ABC قائم في B

ب. $|Z| = 1$ يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين و الضلعان المتقايسان هما $[AB]$ و $[CB]$

ت. $\begin{cases} arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ |z| = 1 \end{cases}$ يعني أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

ث. $\begin{cases} arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ |z| = 1 \end{cases}$ يعني أن المثلث ABC متقايس الاضلاع

ج. $\begin{cases} arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ يعني أن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين و الضلعان المتقايسان هما $[AC]$ و $[CB]$

ح. $\begin{cases} arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ يعني أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين و الضلعان المتقايسان هما $[AC]$ و $[CB]$

مجموعة النقط 1 :

ليكن: $Z = f(z)$ حيث : $z = x + iy$

لتحديد مجموعة النقط من المستوي بحيث : Z عدد حقيقي أو تخيلي صرف ، أو حقيقي سالب أو حقيقي موجب نتبع ما يلي

1. نكتب Z على الشكل الجبري (يكون ذلك بكتابة $z = x + iy$ ثم إذا كانت $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ مثلا نضرب في مرافق $h(z)$
وإذا لم تكن كذالك نرتب الأعداد الغير متعلقة بـ i تمثل الجزء الحقيقي والمتعلقة بـ i تمثل الجزء التخيلي

ملاحظة : عادة ما يظن التلاميذ أن مرافق $z + 1$ مثلا هو $z - 1$ لا هو ليس كذالك هو $x + 1 - iy$

2. Z عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان $im(Z) = 0$ و Z عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان : $\begin{cases} Re\,(Z) = 0 \\ im(Z) \neq 0 \end{cases}$

إذا وجد حل العبارة $im(Z) = 0$ أو $Re\,(Z) = 0$ هو الثنائيات $(x\,;y)$ التي تحقق معادلة من الشكل $ax + by + c = 0$

مجموعة النقط هي مستقيم ذو المعادلة اعلاه قد تكون منقوص منه نقطة أو اكثر وهي النقاط ذات الإحداثيات $(x_0\,;y_0)$ التي تكون ثنائيات ممنوعة بالنسبة للعبارة $f(z)$ أو التي تجعل $im(Z) = 0$ في حالة التخيلي الصرف

إذا وجد حل العبارة $im(Z) = 0$ أو $Re\,(Z) = 0$ هو الثنائيات $(x\,;y)$ التي تحقق معادلة من الشكل $x^2 + y^2ax + by + c = 0$

مجموعة النقط هي:
- الدائرة التي مركزها $A\left(-\frac{a}{2}\,;-\frac{b}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ إذا كان $a^2 + b^2 > 4c$ (مراعيا الإستثناءات كما ذكرنا سابقا
- أو النقطة A إذا كان $^2 + b^2 = 4c$
- أو المجموعة الخالية إذا كان $a^2 + b^2 < 4c$

Z عدد حقيقي سالب إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} Re\,(Z) < 0 \cdots 1 \\ im(Z) = 0 \cdots 2 \end{cases}$ إذا وجدت مجموعة النقط التي إحداثياها تحقق 2 هي دائرة

ومجموعة النقط التي إحداثياها تحقق $Re\,(Z) = 0$ هي مستقيم يقطع هذه الدائرة في نقطتين فإن مجموعة النقط هي نصف دائرة العلوى او السفلي مغلق او مفتوح أي يمكن استثناء نقطة او نقطتي التقاطع

إذا وجدت مجموعة النقط التي إحداثياها تحقق 2 هي مستقيم ومجموعة النقط التي إحداثياها تحقق $Re\,(Z) = 0$ هي دائرة فإن مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$ ، A و B نقطتي التقاطع للمستقيم والدائرة ، يمكن أن تكون القطعة المستقيمة المفتوحة إذا استثنيت A أو B أو كلتيهما

Z عدد حقيقي موجب إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} Re\,(Z) > 0 \cdots 1 \\ im(Z) = 0 \cdots 2 \end{cases}$ تناقش بنفس الكيفية السابقة عدي الحالة الثانية هي مستقيم (AB)بالاستثناء القطعة $[AB]$ بدلا من القطعة $[AB]$

ملاحظة : ذكرت حالة دائرة ومستقيم لأنها الحالات الأكثر وجودا

مجموعة النقط 2

A و B و C ثلاث نقط ثابتة ومتمايزة مثنى مثنى ، a و b و C و d و e أعداد حقيقية

في كل ما يلي ندخل المرجح إذا كان مجموع المعاملات ليس معدوم وأحد النقاط إذا كان مجموع المعاملات معدوم

ناقشت الحالات المتداولة فقط

مناقشة عبارة من الشكل : $\left\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|d\overrightarrow{MA} + e\overrightarrow{MB}\right\|$

إذا كانت $a + b + c \neq 0$ و $d + e \neq 0$ ندخل G من الطرف الأيمن و $\acute{G}$ من الطرف الأيسر بالاستعمال علاقة شال حيث G مرجح

A، B، C المرفقة بالمعاملات a، b، C و $\acute{G}$ مرجح A، B المرفقة بالمعاملات d ، e على الترتيب في العبارة $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

و العبارة $d\overrightarrow{MA} + e\overrightarrow{MB}$ أي $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} \\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} \end{cases}$ و $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M\acute{G}} + \overrightarrow{\acute{G}A} \\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{M\acute{G}} + \overrightarrow{\acute{G}B} \end{cases}$ نجد : $\left\|(a + b + c)\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|(d + e)\overrightarrow{M\acute{G}}\right\|$

عادة ما يكون : $(a + b + c) = (d + e)$ أي نجد $\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\acute{G}}\right\|$ مجموعة النقط هي محور القطعة $[G\acute{G}]$

إذا كان $a + b + c \neq 0$ و $d + e = 0$ ندخل G في الطرف الأيمن و A أو B في الطرف الايسر أي نكتب مثلا $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$

نجد $\left\|(a + b + c)\overrightarrow{M}\right\| = \left\|(d + e)\overrightarrow{MA} + e\overrightarrow{AB}\right\|$ أي $\left\|(a + b + c)\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|e\overrightarrow{AB}\right\|$ أي $\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\frac{e}{a+b+c}\overrightarrow{AB}\right\|$ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\left\|\frac{e}{a+b+c}\overrightarrow{AB}\right\|$

مناقشة عبارة من الشكل : $(a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC})(d\overrightarrow{MA}+e\overrightarrow{MB})=0$ نتبع نفسه الخطوات :

نجد في حالة $a+b+c\neq 0$ و $d+e\neq 0$ $\left((a+b+c)\overrightarrow{MG}\right)\left((d+e)\overrightarrow{MG'}\right)=0$ أي $(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{MG'})=0$

مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[G'G]$

نجد في حالة : $a+b+c\neq 0$ و $d+e=0$ $\left((a+b+c)\overrightarrow{MG}\right)(e\overrightarrow{AB})=0$ أي $(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{AB})=0$

مجموعة النقط هي المستقيم الذي يشمل G وعمودي على (AB)

مناقشة عبارة من الشكل: $a\overrightarrow{MA}^2+b\overrightarrow{MB}^2+c\overrightarrow{MC}^2+=\lambda$

في حالة $a+b+c\neq 0$ بإدخال G والتبسيط نجد : $\overrightarrow{MG}^2=\frac{\lambda-GA^2-GB^2-GC^2}{a+b+c}=K$

- $K<0$ لا توجد نقط ، الحلول هي المجموعة الخالية
- $K=0$ مجموعة النقط هي G
- $K>0$ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{\ }$

في حالة $a+b+c=0$ ندخل A مثلا نجد : $(\overrightarrow{MA})(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC})=\frac{\lambda-bAB^2-cAC^2}{2}$ مجموعة النقط في هذه الحالة:

هي المستقيم الذي يشمل A ويحقق : $(\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{AH})=\frac{\lambda-bAB^2-cAC^2}{2}$ حيث H النقطة التي تحقق : $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}$

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

التحويلات المبرمجة هي الانسحاب ، الدوران ، التحاكي ، التشابه

نضع Z لاحقة M و Z' لاحقة M' وM' صورة M بالتحويل النقطي U كل من التحويلات النقطية السابقة هي من الشكل $Z'=aZ+b$ ولدينا

$Z'=aZ+b$

$a=1$
U هو الإنسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة b
مثلا $Z'=Z+1+i$
U هو الإنسحاب الذي شعاعه ذو المركبات $(1;1)$

a عدد حقيقي موجب تماما غير معدوم يختلف عن 1
U هو التحاكي الذي نسبته a ومركزه النقطة الصامدة
مثلا $Z'=2Z+1+i$
نسبة هذا التحاكي 2 ومركزه النقطة التي لاحقتها Z تحقق $Z=2Z+1+i$ أي التي إحداثياها $(-1;-1)$

a من الشكل $x+iy$ $y\neq 0$ و$|a|=1$
U هو الدوران الذي زاويته $\arg a$ ومركزه النقطة الصامدة
مثلا $Z'=iZ+1+i$
زاوية هذا الدوران $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة التي لاحقتها Z تحقق $Z=iZ+1+i$ أي : $Z=\frac{1+i}{1-i}$ أي $Z=i$ أي التي إحداثياها $(0;1)$

a من الشكل $x+iy$ $y\neq 0$ و $|a|\neq 1$ و U هو التشابه الذي زاويته $\arg a$ ونسبته $|a|$ ومركزه النقطة الصامدة
مثلا $Z'=(1+i)Z+1+i$
زاوية هذا الدوران $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومركزه النقطة التي لاحقتها Z تحقق $Z=(1+i)Z+1+i$
أي : $Z=\frac{1+i}{-i}$ أي $Z=i-1$ أي التي $(-1;1)$